# Wstęp

Zbiór „Mój przedmiot matematyka” jest zestawem 132 scenariuszy przeznaczonych dla uczniów szczególnie zainteresowanych matematyką. Scenariusze mogą być wykorzystywane przez nauczycieli zarówno na typowych zajęciach lekcyjnych wpisanych w zakres podstawowy, jak też
w ramach dodatkowych zajęć poszerzających wiedzę uczniów, np. koła zainteresowań. Scenariusze wymagają zastosowania komputerów
z dostępem do internetu. Takie wyposażenie pozwoli na wykorzystanie środków dydaktycznych przewidzianych w projekcie „Nauki ścisłe priorytetem społeczeństwa opartego na wiedzy” takich jak moduły e-learningowe: „Elementy statystyki i rachunek prawdopodobieństwa”, „Funkcja kwadratowa”, „Równania i nierówności liniowe i kwadratowe”, „Wielomiany”, gry strategiczne „Wyprawa Nasreddina”, „Herbatka
u królowej Anglii”, „Wyprawa na grzyby”, „Matemafia” oraz „Międzykontynentalna szkoła”, poradniki „Ciągi”, „Planimetria”, „Trygonometria”, „Geometria analityczna”. Scenariusze mogą być realizowane na zajęciach lekcyjnych jako całość lub nauczyciel dokonuje wyboru określonych materiałów zgodnie z zaplanowanymi przez siebie tematami – zwiększa to elastyczność stosowania pakietu np. w sytuacji braku zapewnienia
w placówce odpowiednich warunków technicznych do realizacji materiału w oparciu o cały pakiet.

Spis scenariuszy

[Wstęp 1](#_Toc336437415)

[Scenariusz nr 1: Przesuwanie paraboli 3](#_Toc336437416)

[Scenariusz nr 2: Postać kanoniczna funkcji kwadratowej 12](#_Toc336437417)

[Scenariusz nr 3: Postać ogólna funkcji kwadratowej 18](#_Toc336437418)

[Scenariusz nr 4: Miejsca zerowe funkcji kwadratowej 25](#_Toc336437419)

[Scenariusz nr 5: Postać iloczynowa funkcji kwadratowej 33](#_Toc336437420)

[Scenariusz nr 6: Równania kwadratowe 40](#_Toc336437421)

[Scenariusz nr 7: Nierówności kwadratowe 46](#_Toc336437422)

[Scenariusz nr 8: Największa i najmniejsza wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym 55](#_Toc336437423)

[Scenariusz nr 9: Układy równań, z których co najmniej jedno jest stopnia drugiego 63](#_Toc336437424)

[Scenariusz nr 10: Zadania optymalizacyjne wykorzystujące własności funkcji kwadratowej 76](#_Toc336437425)

[Scenariusz nr 11\*: Nierówności kwadratowe z parametrem 82](#_Toc336437426)

[Scenariusz nr 12\*: Równania kwadratowe z parametrem 88](#_Toc336437427)

[Scenariusz nr 13\*: Wzory Viete’a 97](#_Toc336437428)

[Scenariusz nr 14: Przesuwanie paraboli 2 104](#_Toc336437429)

# Scenariusz nr 1: Przesuwanie paraboli

|  |  |
| --- | --- |
| **Temat zajęć** | **Przesuwanie paraboli** |
| **Dział** | **Funkcja kwadratowa** |
| **Klasa (poziom edukacyjny)** | **druga technikum** |
| **Czas trwania zajęć** | **90 minut** |
| **Lp.** | **Element scenariusza** | **Treść zajęć** |
|  | Cel ogólny | * Szkicowanie wykresów funkcji kwadratowej
* Odczytywanie pewnych własności funkcji kwadratowej ze wzoru lub wykresu
* Wyciąganie wniosków na podstawie wykresów funkcji
* Rozwijanie umiejętności logicznego twórczego myślenia, wnioskowania, współpracy, współodpowiedzialności
 |
|  | Cele szczegółowe | Uczeń:* potrafi rozpoznać funkcję kwadratową,
* potrafi podać definicję oraz własności funkcji kwadratowej,
* potrafi naszkicować wykres funkcji kwadratowej,
* potrafi odczytać dziedzinę i zbiór wartości z wykresu funkcji, oraz ze wzoru,
* potrafi dokonać porównań argumentów , wartości funkcji i odpowiednio je przeanalizować.
 |
|  | Formy i metody | * Praca indywidualna z komputerem
* Ćwiczenia
* Praca z tablicą interaktywną
 |
|  | Środki dydaktyczne(ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra) | Tablica interaktywna, moduł e-learningowy. |
|  | Wprowadzenie do zajęć | Zalogowanie się na platformie e-learningowej : kurs „Funkcja kwadratowa” (lekcja 1) |
|  | Przebieg zajęć *(pełna wersja)* | Na początku lekcji przypominamy podstawowe własności dotyczące funkcji: * pojęcie dziedziny i wartości funkcji
* pojęcie monotoniczności funkcji, definicję funkcji rosnącej, malejącej, stałej.

Temat lekcji realizujemy w oparciu o tablicę interaktywną. Wykorzystuję program FnGraph. Lekcję prowadzimy wykorzystując do tego kurs „Funkcja kwadratowa” (lekcja 1) zamieszczony na platformie e-learningowej moodle. Wykresy szkicuje początkowo nauczyciel pokazując jednocześnie w jaki sposób wykorzystać program i tablicę. Wykonując kolejne ćwiczenia uczniowie mogą szkicować wykresy funkcji.**Ćwiczenie 1.**Sporządź w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji określonych wzorami:1. , , , ,
2. , , , ,

Jakie własności mają narysowane wykresy funkcji? Wskaż podobieństwa i różnice narysowanych wykresów.**WNIOSEK**Krzywą, która jest wykresem funkcji , gdzie nazywamy ***parabolą***. Wierzchołek paraboli leży w początku układu współrzędnych.Wartość współczynnika ***a*** funkcji decyduje o tym, czy ramiona paraboli skierowane są do góry ( gdy a > 0 ), czy do dołu ( gdy a < 0 ) oraz o rozchyleniu ramion paraboli.**a < 0** yx **a > 0** yx     ***Przesunięcie wzdłuż osi OX***Wykresem funkcji , jest parabola o wierzchołku w punkcie *(p,0),* która powstała w wyniku przesunięcia wykresu funkcji  **o p jednostek wzdłuż osi x** (dla p > 0 w stronę prawą, dla p < 0 w stronę lewą). y*(p,0)*      x**Ćw. 1.** (INTERAKTYWNE) Wykres funkcji przesunięto o 5 jednostek w prawo i otrzymano wykres funkcji:1. poprawne

**Ćwiczenie 2.**Sporządź wykres funkcji , a następnie przesuń narysowaną parabolę wzdłuż osi OX o:1. 5 jednostek w prawo
2. 2 jednostki w lewo
3. 6 jednostek w prawo
4. 12 jednostek w lewo

Podaj wzór funkcji, których wykresy otrzymałeś w wyniku tych przekształceń. ***Przesunięcie wzdłuż osi OY***Wykresem funkcji , jest parabola o wierzchołku w punkcie *(0,q),* która powstała w wyniku przesunięcia wykresu funkcji  **o q jednostek wzdłuż osi y**  ( dla q > 0 w górę, dla q < 0 w dół).xy *(0,q)***Ćw. 2.** (INTERAKTYWNE) Wykres funkcji przesunięto o 3 jednostki w górę i otrzymano wykres funkcji:1. poprawne
2.
3.
4.

**Ćwiczenie 3.**Sporządź wykres funkcji , a następnie przesuń narysowaną parabolę wzdłuż osi OY o:1. 7 jednostek w dół
2. 3 jednostki w górę
3. 1 jednostkę w dół
4. 10 jednostek w górę

Podaj wzór funkcji, których wykresy otrzymałeś w wyniku tych przekształceń. ***Przesunięcie wzdłuż obu osi układu współrzędnych***Wykresem funkcji , jest parabola o wierzchołku w punkcie ***W = (p,q),*** która powstała w wyniku przesunięcia wykresu funkcji **o p jednostek wzdłuż osi x oraz o q jednostek wzdłuż osi y.**   yx , p |    *W=(p,q)* **Ćw.3.** (INTERAKTYWNE) Wykres funkcji otrzymano w wyniku przesunięcia :1. o 4 jednostki w lewo i 6 jednostek w dół poprawne
2. o 4 jednostki w prawo i 6 jednostek w dół
3. o 4 jednostki w lewo i 6 jednostek w górę
4. o 4 jednostki w prawo i 6 jednostek w górę

  **Ćwiczenie 4.**Sporządź wykres funkcji , a następnie przesuń narysowaną parabolę wzdłuż osi OX i OY o:1. 2 jednostki w prawo i 5 jednostek w dół
2. 3 jednostki w lewo i 2 jednostki w górę
3. 1 jednostkę w prawo i 4 jednostki w górę
4. 6 jednostek w lewo i 3 jednostki w dół

Podaj wzór funkcji, których wykresy otrzymałeś w wyniku tych przekształceń. Wykonaj ćwiczenia sprawdzające z kursu „Funkcja kwadratowa” (lekcja 1) zamieszczony na platformie e-learningowej moodle. **Zad. 1**. Wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej ma współrzędne:1. (20,0) poprawne
2. (-20,0)
3. (0,20)
4. (0,-20)

**Zad. 2**. Wykres funkcji przesuniętej o 2 jednostki w lewo i 7 jednostek w dół przedstawia się wzorem:1. poprawne

**Zad. 3.** Osią symetrii wykresu funkcji jest prosta o równaniu:1. x = 5 poprawne
2. y = 6
3. x + 5 = 0
4. x = -3

**Zad. 4.** Wykres funkcji kwadratowej **nie ma** punktów wspólnych z prostą o równaniu:1. y = - 6 poprawne
2. x =
3. x = - 6
4. y =

**Zad. 5.**Funkcja przyjmuje wartości ujemne dla każdego argumentu. Zatem c może mieć wartość równą:1. 50 poprawne
2. -3
3. 0
4. -1

**Zad. 6.** Jeżeli wykres funkcji przesuniemy o 2 jednostki w prawo wzdłuż osi OX to otrzymamy wykres funkcji *g* określonej wzorem:1. poprawne

**Rozwiązywanie zadań.**  Treść zadań do lekcji została umieszczona na platformie e-learningowej na końcu lekcji 1 w postaci pliku pdf z możliwością druku.Uczeń ma za zadanie samodzielnie rozwiązać cztery zadania i przesłać do nauczyciela odpowiedzi korzystając z platformy. **Zadania do lekcji 1- *lekcja 1 kursu e-learningowego* (do samodzielnego rozwiązania i przesłania odpowiedzi)****Zad. 1.1.** Ile punktów wspólnych ma parabola z wykresem funkcji:**Zad. 1.2.** Wykresy podanych funkcji są symetryczne względem pewnej prostej. Podaj jej równanie.1. i
2. i

**Zad. 1.3.** Jakie warunki powinny spełniać liczby k, a, p, oraz q, aby parabola i prosta y = k miały dokładnie jeden punkt wspólny?**Zad. 1.4.** Wykonaj wykres funkcji kwadratowej . |
|  | Podsumowanie zajęć | Ocena aktywności uczniów na lekcji i zadanie pracy domowej. |
|  | Uwagi metodyczne do realizacji |  |

# Scenariusz nr 2: Postać kanoniczna funkcji kwadratowej

|  |  |
| --- | --- |
| **Temat zajęć** | **Postać kanoniczna funkcji kwadratowej** |
| **Dział** | **Funkcja kwadratowa** |
| **Klasa (poziom edukacyjny)** | **druga technikum** |
| **Czas trwania zajęć** | **90 minut** |
| **Lp.** | **Element scenariusza** | **Treść zajęć** |
|  | Cel ogólny | * Szkicowanie wykresów funkcji kwadratowej
* Odczytywanie pewnych własności funkcji kwadratowej ze wzoru lub wykresu
* Wyciąganie wniosków na podstawie wykresów funkcji
* Rozwijanie umiejętności logicznego twórczego myślenia, wnioskowania, współpracy, współodpowiedzialności
 |
|  | Cele szczegółowe | Uczeń * potrafi uzyskać postać kanoniczną funkcji kwadratowej z funkcji ;
* potrafi odczytać współrzędne wierzchołka paraboli z postaci kanonicznej;
* zna pojęcia: funkcji, dziedziny, zbioru wartości, miejsca zerowego;
* potrafi określać wzór funkcji kwadratowej na podstawie jej wykresu i opisać jej własności;
* potrafi odczytać dziedzinę i zbiór wartości z wykresu funkcji, oraz ze wzoru;
* potrafi dokonać porównań argumentów , wartości funkcji i odpowiednio je przeanalizować;
* potrafi na podstawie wykresu odczytać przedziały monotoniczności funkcji oraz jej ekstrema.
 |
|  | Formy i metody | * Praca indywidualna z komputerem
* Ćwiczenia
* Praca z tablicą interaktywną
 |
|  | Środki dydaktyczne(ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra) | Tablica interaktywna, moduł e-learningowy . |
|  | Wprowadzenie do zajęć | Zalogowanie się na platformie e-learningowej : kurs „Funkcja kwadratowa” (lekcja 2). |
|  | Przebieg zajęć *(pełna wersja)* | Poznasz teraz jedną z trzech postaci funkcji kwadratowej. Funkcję określoną wzorem , gdzie , , nazywamy **funkcją kwadratową w postaci kanonicznej**. Jej wierzchołkiem jest punkt o współrzędnych . ***Przykład 1***Dla funkcji: wierzchołek ma współrzędne **W = (1,3).** wierzchołek ma współrzędne **W = ( -5, -2).*****Przykład 2*** Wyznacz wzór funkcji kwadratowej mając dane współrzędne wierzchołka paraboli oraz punktu należącego do wykresu funkcji.Wiemy, że stąd .Podstawiamy współrzędne wierzchołka do wzoru funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej: Ponieważ punkt P należy do wykresu funkcji zatem:Funkcja kwadratowa w postaci kanonicznej przedstawia się wzorem  **Ćw. 1** (INTERAKTYWNE)Wierzchołek paraboli ma współrzędne:1. (-6,-7) poprawne
2. (6,-7)
3. (6,7)
4. (-3,-7)

Zapoznaj się z podstawowymi własnościami wynikającymi z postaci kanonicznej funkcji kwadratowej.  Jeżeli **a > 0**, to funkcja : y   | x p  \_\_ q  *W=(p,q)*   * jest malejąca w przedziale ;
* jest rosnąca w przedziale ;
* ;
* posiada wartość najmniejszą *y = q* dla *x = p.*

Jeżeli **a < 0**, to funkcja : y  *W=(p,q)* \_\_ q  | x p   * jest rosnąca w przedziale ;
* jest malejąca w przedziale ;
* ;
* posiada wartość największą *y = q* dla *x = p.*

Wykresem funkcji , , jest parabola o wierzchołku w punkcie , której **osią symetrii** jest prosta o równaniu **.** **Ćw. 2** (INTERAKTYWNE)Oś symetrii wykresu funkcji kwadratowej ma równanie:1. x = 2 poprawna
2. x = -2
3. x = 8
4. x = 4

Następnie wykonujemy ćwiczenia testowe zamieszczone na platformie e-learningowej.**Zad.1.** Maksymalny przedział, w którym funkcja kwadratowa jest malejąca to:A. poprawneB. C. D. **Zad.2.** Wskaż zbiór wartości funkcji kwadratowej określonej wzorem :A. B. poprawneC. D. **Zad. 3.** Funkcja jest rosnąca w przedziale wówczas:A. p = 5B. p = -3C. p = 3 poprawneD. p = 2**Zad. 4**. Dla funkcji prawdziwe jest zdanie:A. zbiorem wartości funkcji jest przedział B. funkcja posiada wartość najmniejszą poprawneC. suma współrzędnych wierzchołka paraboli jest równa 2D. wykres funkcji ma ramiona skierowane w dół**Rozwiązywanie zadań**Treść zadań do lekcji została umieszczona na platformie e-learningowej na końcu lekcji 2 w postaci pliku pdf z możliwością druku.Uczeń ma za zadanie samodzielnie rozwiązać trzy zadania i przesłać do nauczyciela odpowiedzi korzystając z platformy. **Zadania do lekcji 2 *- lekcja 2 kursu e-learningowego* (do samodzielnego rozwiązania i przesłania odpowiedzi)****Zad.2.1**. Wyznacz wzór funkcji, której wykresem jest parabola o wierzchołku W i przechodząca przez punkt P, jeśli:1. W = (4,3) i P = (2,-1)
2. W = (5,-2) i P = (1,1)

**Zad.2.2.** Określ zbiór wartości, przedziały monotoniczności oraz wartość największą lub najmniejszą dla funkcji kwadratowej .**Zad. 2.3.** Wyznacz wzór funkcji kwadratowej, o której wiadomo, że dla argumentu x = 2 przyjmuje wartość najmniejszą równą 4, zaś wykres funkcji przecina oś OY w punkcie (0,5). |
|  | Podsumowanie zajęć | Ocena aktywności uczniów na lekcji i zadanie pracy domowej. |
|  | Uwagi metodyczne do realizacji |  |

# Scenariusz nr 3: Postać ogólna funkcji kwadratowej

|  |  |
| --- | --- |
| **Temat zajęć** | **Postać ogólna funkcji kwadratowej** |
| **Dział** | **Funkcja kwadratowa** |
| **Klasa (poziom edukacyjny)** | **druga technikum** |
| **Czas trwania zajęć** | **90 minut** |
| **Lp.** | **Element scenariusza** | **Treść zajęć** |
|  | Cel ogólny | * Kształcenie umiejętności samodzielnego dochodzenia do wiedzy
* Rozwijanie umiejętności czytania zadań ze zrozumieniem
* Wykształcenie umiejętności rozwiązywania podstawowych zadań dotyczących funkcji kwadratowej
 |
|  | Cele szczegółowe | Uczeń * potrafi rozróżniać postać kanoniczną i postać ogólną funkcji kwadratowej;
* potrafi przejść z postaci kanonicznej funkcji do postaci ogólnej i odwrotnie;
* potrafi stosować wzory na współrzędne wierzchołka paraboli.
 |
|  | Formy i metody | * Praca indywidualna z komputerem
* Ćwiczenia
* Praca z tablicą interaktywną
 |
|  | Środki dydaktyczne(ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra) | Tablica interaktywna, moduł e-learningowy. |
|  | Wprowadzenie do zajęć | Zalogowanie się na platformie e-learningowej : kurs „Funkcja kwadratowa” (lekcja 3) |
|  | Przebieg zajęć *(pełna wersja)* | Lekcję prowadzimy wykorzystując do tego kurs „Funkcja kwadratowa” (lekcja 3) zamieszczony na platformie e-learningowej moodle. Zapoznajemy ucznia z teorią, ćwiczenia uczniowie rozwiązują samodzielnie. Znasz już postać kanoniczną funkcji kwadratowej. Z tej postaci można otrzymać kolejną postać funkcji kwadratowej.Postać kanoniczna funkcji kwadratowej  Korzystam ze wzoru skróconego mnożenia  Postać ogólna funkcji kwadratowej   Funkcję określoną wzorem , gdzie nazywamy ***funkcją kwadratową w postaci ogólnej.*** Wyprowadźmy teraz wzory pozwalające obliczyć współrzędne wierzchołka paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej , .Przyjmijmy, że wzory  oraz ( ) określają tę samą funkcję. Wzór w postaci kanonicznej możemy przekształcić do postaci ogólnej:    Wzór: opisuje tę samą funkcję, co wzór , więc odpowiednie współczynniki muszą być równe.  Zatem : i .Z otrzymanych równości możemy wyznaczyć *p* i *q* w zależności od *a, b* i *c:*  oraz  W miejsce p wstawiamy :Wyrażenie  nazywamy **wyróżnikiem trójmianu kwadratowego** ,  Stąd**:**  Współrzędne wierzchołka paraboli , która jest wykresem funkcji kwadratowej , można obliczyć ze wzorów:  **, , gdzie** **UWAGA**Aby obliczyć drugą współrzędną wierzchołka paraboli, możemy również obliczyć ją podstawiając pierwszą współrzędną do wzoru funkcji, czyli **Ćw. 1** (INTERAKTYWNE) Wyróżnik trójmianu kwadratowego jest równy:A. 12 poprawneB. -4C. 4D. -12**Ćw. 2** (INTERAKTYWNE) Współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji wynoszą:A. poprawneB.C. D. ***Przykład 2***.Przedstaw funkcję w postaci kanonicznej. Określam współczynniki a = 3, b = 6, c = -7Obliczam Zatem  (lub Zatem postać kanoniczna funkcji kwadratowej to:Wykres funkcji przecina oś OY w punkcie o współrzędnych ***( 0, c ).*****Ćwiczenia do wykonania na lekcji:****Zad. 1.** Wzór funkcji kwadratowej można zapisać w postaci ogólnej:A. B. C. poprawneD. **Zad. 2**. Wzór funkcji kwadratowej można zapisać w postaci kanonicznej:A. B. C. D. poprawne**Zad. 3.** Do wykresu funkcji należy punkt o współrzędnej:A. (-1,0)B. (1,4)C. (-1,4) poprawneD. (-2,2)**Zad. 4.** Wierzchołek paraboli leży na prostej danej równaniem: A. poprawneB. C. D. **Zad. 5**. Wierzchołek paraboli leży poniżej osi OX dla:A. poprawneB. C. D. **Zad. 6**. Punkt jest wierzchołkiem paraboli o równaniu . Liczba m jest równa:A. 1,5 poprawneB. -1,5C. -3D. 2**Rozwiązywanie zadań.**  Treść zadań do lekcji została umieszczona na platformie e-learningowej na końcu lekcji 3 w postaci pliku pdf z możliwością druku Po przejściu przez strony dotyczące teorii i ćwiczeniowe uczeń ma za zadanie samodzielnie rozwiązać trzy zadania i przesłać do nauczyciela odpowiedzi korzystając z platformy. ***Zadania do lekcji 3 - lekcja 3 kursu e-learningowego (do samodzielnego rozwiązania i przesłania odpowiedzi)*****Zad.3.1.** Wyznacz wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej jeśli widomo, że:1. jej wykres przechodzi przez punkty
2. zbiorem wartości funkcji jest przedział , osią symetrii wykresu funkcji jest prosta oraz

**Zad. 3. 2.** Zbadaj monotoniczność funkcji .**Zad. 3.3**. Wyznacz wartości m i n, dla których funkcje f i g są równe:   |
|  | Podsumowanie zajęć | Ocena aktywności uczniów na lekcji i zadanie pracy domowej. |
|  | Uwagi metodyczne do realizacji |  |

# Scenariusz nr 4: Miejsca zerowe funkcji kwadratowej

|  |  |
| --- | --- |
| **Temat zajęć** | **Miejsca zerowe funkcji kwadratowej** |
| **Dział** | **Funkcja kwadratowa** |
| **Klasa (poziom edukacyjny)** | **druga technikum** |
| **Czas trwania zajęć** | **90 minut** |
| **Lp.** | **Element scenariusza** | **Treść zajęć** |
|  | Cel ogólny | * Kształcenie umiejętności samodzielnego dochodzenia do wiedzy
* Rozwijanie umiejętności czytania zadań ze zrozumieniem
* Wykształcenie umiejętności rozwiązywania podstawowych zadań dotyczących funkcji kwadratowej
* Rozwijanie umiejętności logicznego twórczego myślenia, wnioskowania, współpracy, współodpowiedzialności
 |
|  | Cele szczegółowe | Uczeń:* potrafi podać zależność istnienia liczby miejsc zerowych od wyróżnika
* potrafi obliczyć miejsca zerowe trójmianu kwadratowego
* potrafi przekształcić wzajemnie różne postacie trójmianu kwadratowego (ogólną i kanoniczną)
 |
|  | Formy i metody | * Praca indywidualna z komputerem
* Ćwiczenia
* Praca z tablicą interaktywną
 |
|  | Środki dydaktyczne(ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra) | Tablica interaktywna, moduł e-learningowy. |
|  | Wprowadzenie do zajęć | Zalogowanie się na platformie e-learningowej : kurs „Funkcja kwadratowa” (lekcja 4). |
|  | Przebieg zajęć *(pełna wersja)* | Temat lekcji realizujemy w oparciu o tablicę interaktywną. Lekcję prowadzimy wykorzystując do tego kurs „Funkcja kwadratowa” (lekcja 4) zamieszczony na platformie e-learningowej moodle. *Na początku przypomnijmy, że* ***miejscem zerowym funkcji*** *nazywamy taki argument, dla którego wartość funkcji jest równa zero.*Liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej ,,zależy od wyróżnika :*Zapoznaj się teraz kiedy funkcja kwadratowa ma miejsca zerowe.*W celu wyznaczenia miejsc zerowych funkcji kwadratowej ,, trzeba rozwiązać równanie **Definicja**Równanie , w którym , nazywamy **równaniem kwadratowym.*****DLA CHĘTNYCH*** Wyprowadźmy wzory pozwalające rozwiązać równania kwadratowe Aby znaleźć sposób rozwiązania dowolnego równania kwadratowego, sprowadźmy jego lewą stronę do postaci kanonicznej:Aby rozwiązać to równanie, przekształcamy je do postaciDzielimy obie strony przez :Rozpatrzmy teraz następujące przypadki:1. Jeśli , to , więc

a zatem stąd1. Jeśli , to

stąd1. Jeśli , to równanie nie ma rozwiązania, gdyż po lewej stronie

jest liczba nieujemna , natomiast po prawej stronie jest liczba ujemna (bo **Twierdzenie** *Równanie kwadratowe mające wyróżnik* ***:***1. *ma dokładnie dwa rozwiązania* *, gdy**,*
2. *ma dokładnie jedno rozwiązanie , gdy**,*
3. *nie ma rozwiązań, gdy .*

 Twierdzenie powyższe pozwala rozwiązywać równania kwadratowe, dając jednocześnie odpowiedź na pytanie, czy funkcja kwadratowa , ma miejsca zerowe, a jeśli tak, to jak je wyznaczyć.*Funkcja kwadratowa , gdzie dla:** ma *dwa miejsca zerowe* wyrażone wzorami:

* ma *jedno miejsce zerowe* wyrażone wzorem:

 * *nie ma miejsc zerowych.*

***Przykład 1***Wyznacz miejsca zerowe funkcji kwadratowej .Określam współczynniki: a = 2 b = -3 c = -2Obliczam wyróżnik trójmianu kwadratowego: , Ponieważ , więc funkcja posiada dwa miejsca zerowe:  ***Przykład 2***Wyznacz miejsca zerowe funkcji kwadratowej .Określam współczynniki: a = 1 b = 6 c = 9Obliczam wyróżnik trójmianu kwadratowego: .Ponieważ , więc funkcja posiada jedno miejsce zerowe:***Przykład 3***Wyznacz miejsca zerowe funkcji kwadratowej .Określam współczynniki: a = 1 b = 1 c = 1Obliczam wyróżnik trójmianu kwadratowego: .Ponieważ , więc funkcja nie posiada miejsca zerowych.**Zapoznałeś się już z treścią lekcji. Rozwiąż teraz test sprawdzający twoje umiejętności. Wybierz jedną prawidłową odpowiedź spośród czterech.****POWODZENIA !!!****Ćwiczenia do wykonania na lekcji:****Zad. 1.** Funkcja kwadratowa ma jedno miejsce zerowe dla:A. k = 0B. k = 2C. k = 4D. k = -2 poprawne**Zad. 2.** Suma miejsc zerowych funkcji jest równa:A. 4B. - 4C. - 6 poprawneD. 6**Zad. 3.** Miejsca zerowe funkcji kwadratowej to liczby:1. 2 i 5 poprawne
2. -2 i -5
3. -2 i 5
4. 2 i -5

**Zad. 4.** Miejscami zerowymi funkcji są liczby-3 i 5, wówczas:A. b=-8 , c=-60 poprawneB. b=4, c=-30C. b=2 , c=-8D. b=-2 , c=-15**Zad. 5.** Funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych, gdy:A. poprawneB.C.D. **Zad. 6.** Jeżeli funkcja ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, to:A poprawne B.C. D.  **Rozwiązywanie zadań.**  Treść zadań do lekcji została umieszczona na platformie e-learningowej na końcu lekcji 4 w postaci pliku pdf z możliwością druku. Po przejściu przez strony dotyczące teorii i ćwiczeniowe uczeń ma za zadanie samodzielnie rozwiązać trzy zadania i przesłać do nauczyciela odpowiedzi korzystając z platformy. ***Zadania do lekcji 4 -lekcja 4 kursu e-learningowego (do samodzielnego rozwiązania i przesłania odpowiedzi)*****Zad. 4.1.** Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartość -32?**Zad. 4.2.** Dana jest funkcja kwadratowa w postaci ogólnej . Znajdź te wartości współczynników b i c , dla których miejscami zerowymi funkcji są liczby -2 i 1.**Zad. 4.3.** Funkcja najmniejszą wartość przyjmuje dla argumentu 3, a liczba 2 jest miejscem zerowym tej funkcji.1. Znajdź wzór funkcji f.
2. Wyznacz drugie miejsce zerowe funkcji.
3. Zapisz wzór funkcji w postaci kanonicznej.
 |
|  | Podsumowanie zajęć | Ocena aktywności uczniów na lekcji i zadanie pracy domowej. |
|  | Uwagi metodyczne do realizacji |  |

# Scenariusz nr 5: Postać iloczynowa funkcji kwadratowej

|  |  |
| --- | --- |
| **Temat zajęć** | **Postać iloczynowa funkcji kwadratowej** |
| **Dział** | **Funkcja kwadratowa** |
| **Klasa (poziom edukacyjny)** | **druga technikum** |
| **Czas trwania zajęć** | **90 minut** |
| **Lp.** | **Element scenariusza** | **Treść zajęć** |
|  | Cel ogólny | * Kształcenie umiejętności samodzielnego dochodzenia do wiedzy
* Rozwijanie umiejętności czytania zadań ze zrozumieniem
* Wykształcenie umiejętności rozwiązywania podstawowych zadań dotyczących funkcji kwadratowej
* Rozwijanie umiejętności logicznego twórczego myślenia, wnioskowania, współpracy, współodpowiedzialności
 |
|  | Cele szczegółowe | Uczeń * potrafi podać zależność istnienia liczby miejsc zerowych od wyróżnika;
* potrafi obliczyć miejsca zerowe trójmianu kwadratowego;
* potrafi przekształcić wzajemnie różne postacie trójmianu kwadratowego.
 |
|  | Formy i metody | * Praca indywidualna z komputerem
* Ćwiczenia
* Praca z tablicą interaktywną
 |
|  | Środki dydaktyczne(ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra) | Tablica interaktywna, moduł e-learningowy. |
|  | Wprowadzenie do zajęć | Zalogowanie się na platformie e-learningowej : kurs „Funkcja kwadratowa” (lekcja 5). |
|  | Przebieg zajęć *(pełna wersja)* | Temat lekcji realizujemy w oparciu o tablicę interaktywną. Lekcję prowadzimy wykorzystując do tego kurs „Funkcja kwadratowa” (lekcja 5) zamieszczony na platformie e-learningowej moodle. Podamy teraz sposób przedstawienia funkcji kwadratowej w postaci iloczynu dwóch czynników. W tym celu wykorzystamy postać kanoniczną funkcji kwadratowej.Jak pamiętamy, przedstawienie funkcji kwadratowej , w postaci kanonicznej jest następujące: Rozważymy teraz różne przypadki tej postaci, w zależności od wyróżnika . Jeśli , to:**.** Jeśli , to:**.** Jeśli , to:  Wyrażenie jest w tym przypadku dodatnie , bo i .Otrzymanego wyżej wyrażenia nie można rozłożyć na czynniki.***Twierdzenie***Funkcję kwadratową , gdzie , gdy (: można przedstawić w postaci iloczynowej gdzie  oraz gdy: można przedstawić w postaci iloczynowej  gdzie Natomiast, gdy , to funkcja kwadratowa **nie ma** postaci iloczynowej.***Przykład 1***.Funkcję kwadratowa można zapisać w postaci iloczynowej, ponieważ:  Zatem , to funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe , :   Stąd postać iloczynowa funkcji kwadratowej to:***Przykład 2***.Przedstaw funkcję kwadratową w postaci iloczynowej.  Zatem , to funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe , :  Stąd postać iloczynowa funkcji kwadratowej to:***Przykład 3***.Przedstaw funkcję kwadratową w postaci iloczynowej.  Zatem , to funkcja kwadratowa ma jedno miejsce zerowe:Stąd postać iloczynowa funkcji kwadratowej to:***Przykład 4***.Przedstaw funkcję kwadratową w postaci iloczynowej.  Zatem , to funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych. Postać iloczynowa funkcji nie istnieje.**Warto wiedzieć**Współrzędne wierzchołka paraboli możemy wyznaczyć korzystając z postaci iloczynowej funkcji kwadratowej: ,  gdzie – miejsca zerowe funkcji .**Ćwiczenia do wykonania na lekcji:****Zad. 1.** Miejsca zerowe funkcji określonej w postaci iloczynowej to:A. x = -1, x = 3 poprawne B. x = -1, x = -3C. x = 1, x = -3D. x = 1, x = 3**Zad. 2.** Funkcja kwadratowa o miejscach zerowych 2 i -5, której wykres przechodzi przez punkt (-1, 24) ma wzór:1. poprawne
2.

**Zad. 3.** Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej są liczby -10 i 30. Równanie osi symetrii wykresu funkcji ma postać:A. x = 10 poprawneB. x = -10C. y = -10D. y = 10**Zad. 4.** Wzór funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej to:A. poprawneB. C. D. **Zad. 5.** Jednym z miejsc zerowych funkcji kwadratowej jest liczba 3 i odcięta wierzchołka paraboli jest równa 1. Wzór funkcji f w postaci iloczynowej ma postać:A. poprawneB. C. D. **Zad. 6.**  Największa wartość funkcji wynosi:A. 9 poprawneB. 5C. -7D. -5**Rozwiązywanie zadań** .Treść zadań do lekcji została umieszczona na platformie e-learningowej na końcu lekcji 5 w postaci pliku pdf z możliwością druku.Po przejściu przez strony dotyczące teorii i ćwiczeniowe uczeń ma za zadanie samodzielnie rozwiązać trzy zadania i przesłać do nauczyciela odpowiedzi korzystając z platformy. ***Zadania do lekcji 5 - lekcja 5 kursu e-learningowego (do samodzielnego rozwiązania i przesłania odpowiedzi)*****Zad. 5.1.** Funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe. Podaj wzór funkcji w postaci iloczynowej oraz w postaci kanonicznej.**Zad. 5.2.** Wyznacz współrzędne punktów przecięcia wykresu funkcji z osiami układu współrzędnych oraz wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli.**Zad. 5.3.** Wyznacz współczynniki b i c funkcji kwadratowej , jeżeli wiadomo, że przyjmuje ona wartości dodatnie dla argumentów . Znajdź współrzędne punktu przecięcia się wykresu funkcji *f(x)* oraz wykresu funkcji . |
|  | Podsumowanie zajęć | Ocena aktywności uczniów na lekcji i zadanie pracy domowej. |
|  | Uwagi metodyczne do realizacji |  |

#

# Scenariusz nr 6: Równania kwadratowe

|  |  |
| --- | --- |
| **Temat zajęć** | **Równania kwadratowe** |
| **Dział** | **Funkcja kwadratowa** |
| **Klasa (poziom edukacyjny)** | **druga technikum** |
| **Czas trwania zajęć** | **90 minut** |
| **Lp.** | **Element scenariusza** | **Treść zajęć** |
|  | Cel ogólny | * Kształcenie umiejętności samodzielnego dochodzenia do wiedzy
* Rozwijanie umiejętności czytania zadań ze zrozumieniem
* Wykształcenie umiejętności rozwiązywania podstawowych zadań dotyczących funkcji kwadratowej
* Rozwijanie umiejętności logicznego twórczego myślenia, wnioskowania, współpracy, współodpowiedzialności
 |
|  | Cele szczegółowe | Uczeń: * potrafi podać zależność istnienia liczby rozwiązań równania kwadratowego od wyróżnika
* uczeń potrafi obliczyć pierwiastki równania kwadratowego
* uczeń potrafi przekształcić wzajemnie różne postacie trójmianu kwadratowego (ogólną i kanoniczną)
 |
|  | Formy i metody | * Praca indywidualna
* Ćwiczenia
* Praca z tablicą interaktywną
 |
|  | Środki dydaktyczne(ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra) | Tablica interaktywna, prezentacja w PowerPoint.  |
|  | Wprowadzenie do zajęć | Powtórzenie wiadomości dotyczących miejsc zerowych funkcji kwadratowej. |
|  | Przebieg zajęć *(pełna wersja)* | Temat lekcji realizujemy w oparciu o tablicę interaktywną. Lekcję prowadzimy korzystając z prezentacji programu Power Point przygotowanej przez nauczyciela („Równania kwadratowe”).Równanie kwadratowe , w którym współczynniki *b* lub *c* są równe zero, nazywamy **równaniem kwadratowym niezupełnym.****Przykład 1.**Rozwiąż równanie /: 4**Przykład 2**Rozwiąż równanie  **Przykład 3**Rozwiąż równanie   lub **Przykład 4.**Rozwiąż równanie Równanie jest równoważne równaniu , jest to równanie sprzeczne. Równanie nie ma rozwiązania.**Równanie kwadratowe, w którym wszystkie współczynniki *a, b, c* są różne od zera, nazywamy** ***równaniem zupełnym.***Rozwiązywanie równania kwadratowego , polega na wyznaczeniu miejsc zerowych funkcji typu Liczba pierwiastków równania kwadratowego zależy od wyrażenia **,**które nazywamy ***wyróżnikiem równania kwadratowego.*****TWIERDZENIE**Równanie kwadratowe :* gdy , ma dwa pierwiastki, które wyrażamy wzorami:

 , * gdy , ma jeden pierwiastek, który wyrażamy wzorem:

 * gdy , nie ma pierwiastków.

**Przykład 5**Rozwiąż równanie .Obliczmy wyróżnik równania:  Ponieważ zatem na mocy twierdzenia, równanie ma dwa pierwiastki:   Rozwiązania równania: **Przykład 6**Rozwiąż równanie Obliczmy wyróżnik równania:  0Ponieważ zatem na mocy twierdzenia, równanie ma jeden pierwiastek: Równanie ma jedno rozwiązanie: **Przykład 7**Rozwiąż równanie Obliczmy wyróżnik równania:  Ponieważ zatem na mocy twierdzenia, równanie nie ma pierwiastków.Równanie nie ma rozwiązania.**Rozwiązywanie zadań z wykorzystaniem tablicy interaktywnej.****Zad.1.** Rozwiąż równania:**Zad.2.** Rozwiąż równania:**Zad.3.** Rozwiąż równania:**Zad.4.** Liczbę 12 przedstaw w postaci sumy dwóch takich składników, że suma ich kwadratów jest równa 74.**Zad.5.** Podaj dwie kolejne liczby naturalne , których iloczyn jest równy 756.**Zad.6**. Wyznacz te wartości parametru *m,* dla którychrównanie ma jedno rozwiązanie: |
|  | Podsumowanie zajęć | Ocena aktywności uczniów na lekcji i zadanie pracy domowej. |
|  | Uwagi metodyczne do realizacji |  |

**Załączniki do scenariusza nr 6**

Prezentacja PowerPoint „Funkcja kwadratowa”

# Scenariusz nr 7: Nierówności kwadratowe

|  |  |
| --- | --- |
| **Temat zajęć** | **Nierówności kwadratowe** |
| **Dział** | **Funkcja kwadratowa** |
| **Klasa (poziom edukacyjny)** | **druga technikum** |
| **Czas trwania zajęć** | **90 minut** |
| **Lp.** | **Element scenariusza** | **Treść zajęć** |
|  | Cel ogólny | * Kształcenie umiejętności samodzielnego dochodzenia do wiedzy
* Rozwijanie umiejętności czytania zadań ze zrozumieniem
* Wykształcenie umiejętności rozwiązywania podstawowych zadań dotyczących funkcji kwadratowej
 |
|  | Cele szczegółowe | Uczeń:* potrafi rozpoznać nierówności kwadratowe
* potrafi graficznie rozwiązywać nierówności kwadratowe
* potrafi zauważyć analogie miedzy procedurą rozwiązywania równań i nierówności kwadratowych
 |
|  | Formy i metody | * Praca indywidualna z komputerem
* Ćwiczenia
* Praca z tablicą interaktywną
 |
|  | Środki dydaktyczne(ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra) | Tablica interaktywna, moduł e-learningowy. |
|  | Wprowadzenie do zajęć | Zalogowanie się na platformie e-learningowej : kurs „Funkcja kwadratowa” (lekcja 6) |
|  | Przebieg zajęć *(pełna wersja)* | Lekcję prowadzimy wykorzystując do tego kurs „Funkcja kwadratowa” (lekcja 6) zamieszczony na platformie e-learningowej moodle. Zapoznajemy ucznia z teorią, ćwiczenia uczniowie rozwiązują samodzielnie.  Równanie gdzie , nazywamy **równaniem kwadratowym.** Równaniami kwadratowymi są na przykład:  , , .Dziedziną równania kwadratowego jest zbiór liczb rzeczywistych.Wyznaczanie miejsc zerowych funkcji kwadratowej związane jest z liczbą rozwiązań równania kwadratowego .Przypomnij sobie sposoby rozwiązywania równań kwadratowych oglądając prezentację PowerPoint: Równania kwadratowe.***Nierównością kwadratową*** nazywamy każdą z nierówności: lub lub , lub , gdzie i .**Rozwiązać nierówność** np.: (lub ) , , **to wyznaczyć zbiór argumentów, dla których funkcja**, gdzie , **przyjmuje wartości dodatnie (ujemne) .** Dlatego też wygodnie jest rozwiązywać nierówność kwadratową na podstawie wykresu funkcji kwadratowej**.**Znając wykres funkcji kwadratowej , gdzie oraz jej miejsca zerowe możemy wyznaczyć zbiór rozwiązań danej nierówności kwadratowej.**UWAGA** Do rozwiązania nierówności kwadratowej nie potrzebujemy dokładnego wykresu odpowiedniej funkcji. Wystarczy informacja czy ramiona paraboli skierowane są w górę, czy w dół ( a o tym decyduje współczynnik a funkcji kwadratowej) oraz znajomość jej miejsc zerowych.Przeanalizujmy kilka przykładów rozwiązywania nierówności kwadratowych.***Przykład 1***.Rozwiąż nierówność: * Wyznaczmy miejsca zerowe :

   *x =* 0  *lub x =* 2* Rozwiązania równania zaznaczamy na osi OX i szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych w górę ( ponieważ a = 4 >0 ) przechodzącą przez zaznaczone punkty.

 ///// /////// • • x 0 2 * Z wykresu odczytujemy, że nierówność jest spełniona dla argumentów

***Przykład 2***.Rozwiąż nierówność: * Wyznaczmy miejsca zerowe :

 ,  , więc równanie ma dwa rozwiązania:  * Rozwiązania równania zaznaczamy na osi OX i szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych w dół ( ponieważ a = - 4 <0 ) przechodzącą przez zaznaczone punkty.

 ////////  ∘ ∘ x -1 2,25 * Z wykresu odczytujemy, że nierówność : jest spełniona dla argumentów

**Ćw.**Zbiorem rozwiązań nierówności jest zbiór:1. poprawne

***Przykład 3***.Rozwiąż nierówność: * Wyznaczmy miejsca zerowe :

  * Rozwiązania równania zaznaczamy na osi OX i szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych w górę ( ponieważ a = 1 >0 ) przechodzącą przez zaznaczony punkt.

x2   * Z wykresu odczytujemy, że nierówność : :

 jest spełniona dla argumentu***Przykład 4***.Rozwiąż nierówność: * Wyznaczmy miejsca zerowe :

  , więc równanie nie ma rozwiązania:* Szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych w górę ( ponieważ a = 3 >0 )

x  * Z wykresu odczytujemy, że zbiorem rozwiązań nierówności: jest

***Przykład 5***.Rozwiąż: Przekształćmy najpierw nierówność:    * Wyznaczmy miejsca zerowe :

  , więc równanie nie ma rozwiązania:* Szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych w dół ( ponieważ a = -1 < 0 )

x   * Z wykresu odczytujemy, że nierówność : nie ma rozwiązania.

Wykonaj ćwiczenia sprawdzające z kursu „Funkcja kwadratowa” (lekcja 6) zamieszczony na platformie e-learningowej moodle. **Zad. 1.** Zbiorem rozwiązań nierówności jest:A. poprawneB. C. D. **Zad. 2.** Rozwiązaniem nierówności jest:A. poprawneB. C. D. **Zad. 3**. Do zbioru rozwiązań nierówności :1. należy jedna liczba całkowita poprawne
2. należą dwie liczby całkowite
3. należą trzy liczby całkowite
4. nie należą liczby całkowite

**Zad. 4.** Funkcja kwadratowa przyjmuje wartości dodatnie dla argumentów:A. poprawneB. C. D. **Zad. 5.** Przedział jest zbiorem rozwiązań nierówności:1.

**Rozwiązywanie zadań.**  Treść zadań do lekcji została umieszczona na platformie e-learningowej na końcu lekcji 6 w postaci pliku pdf z możliwością druku. Po przejściu przez strony dotyczące teorii i ćwiczeniowe uczeń ma za zadanie samodzielnie rozwiązać trzy zadania i przesłać do nauczyciela odpowiedzi korzystając z platformy. ***Zadania do lekcji 7 – lekcja 6 kursu e-learningowego (do samodzielnego rozwiązania i przesłania odpowiedzi)*****Zad. 6.1**. Rozwiąż nierówność i podaj ile liczb naturalnych należy do zbioru jej rozwiązań.**Zad. 6.2.** Dla jakich argumentów wartości funkcji są większe od wartości funkcji ?**Zad. 6.3.** Wyznacz te argumenty, dla których wartości funkcji należą do przedziału . |
|  | Podsumowanie zajęć | Ocena aktywności uczniów na lekcji i zadanie pracy domowej. |
|  | Uwagi metodyczne do realizacji |  |

# Scenariusz nr 8: Największa i najmniejsza wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym

|  |  |
| --- | --- |
| **Temat zajęć** | **Największa i najmniejsza wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym** |
| **Dział** | **Funkcja kwadratowa** |
| **Klasa (poziom edukacyjny)** | **druga technikum** |
| **Czas trwania zajęć** | **90 minut** |
| **Lp.** | **Element scenariusza** | **Treść zajęć** |
|  | Cel ogólny | * Kształcenie umiejętności samodzielnego dochodzenia do wiedzy
* Rozwijanie umiejętności czytania zadań ze zrozumieniem
* Wykształcenie umiejętności rozwiązywania podstawowych zadań dotyczących funkcji kwadratowej
 |
|  | Cele szczegółowe | Uczeń * potrafi wskazać największą i najmniejszą wartość funkcji kwadratowej;
* potrafi obliczyć największą i najmniejszą wartość funkcji kwadratowej;
* potrafi obliczyć największą i najmniejszą wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym.
 |
|  | Formy i metody | * Praca indywidualna z komputerem
* Ćwiczenia
* Praca z tablicą interaktywną
 |
|  | Środki dydaktyczne(ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra) | Tablica interaktywna, moduł e-learningowy.  |
|  | Wprowadzenie do zajęć | Zalogowanie się na platformie e-learningowej : kurs „Funkcja kwadratowa” (lekcja 7). |
|  | Przebieg zajęć *(pełna wersja)* | Lekcję prowadzimy wykorzystując do tego kurs „Funkcja kwadratowa” (lekcja 7) zamieszczony na platformie e-learningowej moodle. Zapoznajemy ucznia z teorią, ćwiczenia uczniowie rozwiązują samodzielnie. Funkcja liczbowa może przyjmować wartość największą lub wartość najmniejszą.Funkcja kwadratowa osiąga:* *wartość największą*, jeżeli a < 0 ( ramiona paraboli skierowane są w dół); jest ona równa drugiej współrzędnej wierzchołka paraboli będącej wykresem tej funkcji.

 Mamy zatem: * *wartość najmniejszą*, jeżeli a > 0 ( ramiona paraboli skierowane są w górę); jest ona równa drugiej współrzędnej wierzchołka paraboli będącej wykresem tej funkcji.

 Mamy zatem: ***Przykład 1***Funkcja nie osiąga wartości najmniejszej, ponieważ Wyznaczamy jej wartość największą:   dla  Zatem:  ***Przykład 2***Możesz wyznaczyć również wartość największą i najmniejszą funkcji kwadratowej w ***przedziale domkniętym.***Znajdź wartość największą i najmniejszą funkcji w dwóch przedziałach :1. **dla**

    Wartość najmniejsza funkcji w danym przedziale jest równa 7, natomiast wartość największa w przedziale jest równa 11. Można zapisać je w następujący sposób:  1. **dla**

 Zatem wyznaczamy tylko wartości funkcji na krańcach przedziału:  Stąd wartość najmniejsza funkcji w przedziale wynosi 2, zaś największa 10.Można zapisać je w następujący sposób:  **WNIOSEK**Największą i najmniejszą wartość funkcji w przedziale ustalamy spośród elementów zbioru:* ,

gdzie oznacza pierwszą współrzędną(odciętą) wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji .***Przykład 3***Wyznacz współczynniki a, b, c funkcji kwadratowej jeśli oraz liczba 1 jest najmniejszą wartością tej funkcji. Na podstawie danych w zadaniu mamy związki:Rozwiązując układ równań otrzymujemy:  Otrzymujemy: **.**Wykonaj ćwiczenia sprawdzające z kursu „Funkcja kwadratowa” (lekcja 7) zamieszczony na platformie e-learningowej moodle. **Zad. 1.**Jaka jest największa wartość funkcji w przedziale ?A. -26B. -11 poprawnaC. 1D. -1**Zad. 2**. Jaka jest najmniejsza wartość funkcji w przedziale ?A. 4 poprawnaB. 8C. 5D. 1**Zad. 3.** Suma wartości największej i najmniejszej funkcji w przedziale wynosi:A. 15B. -1C. 4 poprawnaD. 8**Zad. 4.** Oceń, które zdanie jest prawdziwe dla funkcji :A. miejsca zerowe funkcji to -3 i 1B. zbiorem wartości funkcji jest przedział C. funkcja jest malejąca w przedziale D. funkcja osiąga wartość najmniejszą równą -8 poprawna**Zad. 5.**  Najmniejszą i największą wartością funkcji w przedziale są odpowiednio liczby:A. -21,-16 poprawnaB. -25,-21C. -25,-16D. -24,-16**Zad. 6.** Funkcja jest malejąca w przedziale i przyjmuje w tym przedziale tylko wartości ujemne, jeśli:A. poprawnaB. C. D**Rozwiązywanie zadań** z wykorzystaniem tablicy interaktywnej. Treść zadań do lekcji została umieszczona na platformie e-learningowej na końcu lekcji 7 w postaci pliku pdf z możliwością druku.**Ćwiczenie 1.**Wyznacz wartość największą i najmniejszą funkcji:**Ćwiczenie 2.**Wyznacz zbiór wartości funkcji określonej wzorem:**Ćwiczenie 3.**Wyznacz wartość największą i najmniejszą funkcji w podanym przedziale:1.

Po przejściu przez strony dotyczące teorii i ćwiczeniowe uczeń ma za zadanie samodzielnie rozwiązać trzy zadania i przesłać do nauczyciela odpowiedzi korzystając z platformy. ***Zadania do lekcji 8 -lekcja 7 kursu e-learningowego (do samodzielnego rozwiązania i przesłania odpowiedzi)*****Zad. 7.1.** Wyznacz wartość największą i najmniejszą funkcji w przedziale .**Zad. 7.2.** Wyznacz współczynniki a, b, c we wzorze funkcji mając dane .**Zad. 7.3.** Jaka jest największa możliwa wartość iloczynu dwóch liczb, których suma jest równa 26? |
|  | Podsumowanie zajęć | Ocena aktywności uczniów na lekcji i zadanie pracy domowej. |
|  | Uwagi metodyczne do realizacji |  |

# Scenariusz nr 9: Układy równań, z których co najmniej jedno jest stopnia drugiego

|  |  |
| --- | --- |
| **Temat zajęć** | **Układy równań, z których co najmniej jedno jest stopnia drugiego** |
| **Dział** | **Funkcja kwadratowa** |
| **Klasa (poziom edukacyjny)** | **druga technikum** |
| **Czas trwania zajęć** | **90 minut** |
| **Lp.** | **Element scenariusza** | **Treść zajęć** |
|  | Cel ogólny | * Kształcenie umiejętności samodzielnego dochodzenia do wiedzy
* Rozwijanie umiejętności czytania zadań ze zrozumieniem
* Wykształcenie umiejętności rozwiązywania podstawowych zadań dotyczących funkcji kwadratowej
 |
|  | Cele szczegółowe | Uczeń * potrafi rozwiązań układ równań algebraicznie i graficznie (używając także programu komputerowego);
* potrafi rozwiązań układ równań graficznie (używając także programu komputerowego);
* potrafi zapisać układ równań z analizy zadania z treścią i rozwiązać go.
 |
|  | Formy i metody | * Praca indywidualna z komputerem
* Ćwiczenia
* Praca z tablicą interaktywną
 |
|  | Środki dydaktyczne(ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra) | Tablica interaktywna, moduł e-learningowy.  |
|  | Wprowadzenie do zajęć | Zalogowanie się na platformie e-learningowej : kurs „Funkcja kwadratowa” (lekcja 8). |
|  | Przebieg zajęć *(pełna wersja)* | Lekcję prowadzimy wykorzystując do tego kurs „Funkcja kwadratowa” (lekcja 8) zamieszczony na platformie e-learningowej moodle. Zapoznajemy ucznia z teorią, ćwiczenia uczniowie rozwiązują samodzielnie. *Potrafisz już rozwiązywać układy równań dwóch równań z dwiema niewiadomymi, gdzie oba równania są pierwszego stopnia.*Rozwiązywanie układów równań, z których co najmniej jedno jest stopnia drugiego, omówimy na przykładach.*Rozwiązaniem układu równań z dwiema niewiadomymi nazywamy każdą parę liczb , która spełnia jednocześnie oba równania układu.***Rozwiązać układ równań to wyznaczyć wszystkie jego rozwiązania lub wykazać, że zbiór rozwiązań układu jest pusty.*****Przykład 1*** Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań **Rozwiązanie algebraiczne:**Porównujemy obie strony obu równań i otrzymujemy równanie kwadratowe:Rozwiązujemy równanie kwadratowe:   to równanie ma dwa rozwiązania ,  Dla wyznaczonych wartości obliczamy druga niewiadomą: lub  lub ***Układ równań ma dwie pary rozwiązań: .*****Rozwiązanie graficzne:** W układzie współrzędnych szkicujemy wykresy równań oraz . Rozwiązaniem układu są punkty przecięcia paraboli i prostej. C:\Users\ZSHE\Documents\PROJEKT\POPRAWKI e-learning FKWADR\L8\wykres przk 1.gif***Przykład 2***Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań **Rozwiązanie algebraiczne:**Porównując obie strony równań, otrzymujemy równanie kwadratowe:  Wyróżnik równania jest równy 0, zatem równanie ma jeden pierwiastek:Wyznaczmy drugą niewiadomą   Układ ma jedno rozwiązanie, jest nim para liczb **(1,1).****Rozwiązanie graficzne:** W układzie współrzędnych szkicujemy wykresy równań oraz Prosta jest styczna do paraboli w punkcie A = (1,1). Współrzędne tego punktu są rozwiązaniem układu. Układ równań ma jedno rozwiązanie. ***Przykład 3***Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań **Rozwiązanie algebraiczne:**Zastosujemy metodę podstawiania: Liczba rozwiązań układu zależy od liczby rozwiązań równania kwadratowego: zatem równanie nie ma rozwiązania, układ równań jest sprzeczny.Układ nie ma rozwiązania.**Rozwiązanie graficzne:** W układzie współrzędnych naszkicujemy wykresy równań oraz . Wykresem równania jest okrąg o środku w punkcie O = (0,0) i promieniu r = 1, natomiast wykresem równania jest prosta. Naszkicowane wykresy nie mają punktów wspólnych, czyli układ równań jest sprzeczny.***Przykład 4***Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań **Rozwiązanie algebraiczne:**Zastosujemy metodę podstawiania: Równanie spełnia każda liczba Zatem układ równań spełniają wszystkie pary mające postać , Układ ten ma nieskończenie wiele rozwiązań.**Rozwiązanie graficzne:**  Równanie opisuje sumę dwóch prostych,  ponieważ Równanie to równanie prostej. Wykresy równań oraz mają nieskończenie wiele punktów wspólnych – są to wszystkie punkty prostej o równaniu .Zatem układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, są to pary mające postać Następnie wykonujemy ćwiczenia testowe zamieszczone na platformie e-learningowej.**Zad. 1.** Jednym z rozwiązań układu równań jest para liczb:A. B. poprawneC. D. **Zad. 2.** Rozkładając liczbę 43 w postaci sumy dwóch składników tak, aby suma ich kwadratów była równa 1145 otrzymamy układ równań:A. B. C. poprawneD. **Zad. 3.** Układ równań :1. Ma jedno rozwiązanie poprawne
2. Ma dwa rozwiązania
3. Jest sprzeczny
4. Ma nieskończenie wiele rozwiązań

**Rozwiązywanie zadań** korzystając z tablicy interaktywnej oraz programu do rysowania wykresów funkcji FnGraph.Treść zadań do lekcji została umieszczona na platformie e-learningowej na końcu lekcji 8 w postaci pliku pdf z możliwością druku**Zad1**. Rozwiąż układ równań i podaj interpretację geometryczną tego układu.**Zad 2.** Dla jakiej wartości parametru *m* prosta przecina parabolę w dwóch różnych punktach?**Zad 3.** Oblicz pole rombu o obwodzie równym 68 cm , jeżeli jedna z jego przekątnych jest o 14 cm dłuższa od drugiej.**Zad 4.** W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych jest o 7 cm dłuższa od drugiej i o 2 cm krótsza od przeciwprostokątnej. Oblicz długości boków tego trójkąta.**Zad 5.** Znajdź liczbę dwucyfrową, której suma cyfr jest równa 9, a iloczyn tej liczby i liczby o przestawionych cyfrach jest równy 2268.Uczeń ma za zadanie samodzielnie rozwiązać trzy zadania i przesłać do nauczyciela odpowiedzi korzystając z platformy. **Zadania do lekcji 9 *- lekcja 8 kursu e-learningowego* (do samodzielnego rozwiązania i przesłania odpowiedzi)****Zad. 8.1.** Rozwiąż układ równań: **Zad. 8.2.** Wyznacz liczbę dwucyfrową, dla której suma cyfr jest równa 7, a iloczyn tej liczby i sumy jej cyfr jest równy 175.**Zad. 8.3.** Oblicz pole prostokąta, którego przekątna ma długość cm, a długości boków różnią się o 12 cm. |
|  | Podsumowanie zajęć | Ocena aktywności uczniów na lekcji i zadanie pracy domowej. |
|  | Uwagi metodyczne do realizacji |  |

# Scenariusz nr 10: Zadania optymalizacyjne wykorzystujące własności funkcji kwadratowej

|  |  |
| --- | --- |
| **Temat zajęć** | **Zadania optymalizacyjne wykorzystujące własności funkcji kwadratowej** |
| **Dział** | **Funkcja kwadratowa** |
| **Klasa (poziom edukacyjny)** | **druga technikum** |
| **Czas trwania zajęć** | **90 minut** |
| **Lp.** | **Element scenariusza** | **Treść zajęć** |
|  | Cel ogólny | * Kształcenie umiejętności samodzielnego dochodzenia do wiedzy
* Rozwijanie umiejętności czytania zadań ze zrozumieniem
* Wykształcenie umiejętności rozwiązywania podstawowych zadań dotyczących funkcji kwadratowej
 |
|  | Cele szczegółowe | Uczeń * potrafi zrozumieć sens zadania optymalizacyjnego;
* potrafi rozwiązać proste zadania prowadzące do ekstremum funkcji kwadratowej.
 |
|  | Formy i metody | * Praca indywidualna z komputerem
* Ćwiczenia
* Praca z tablicą interaktywną
 |
|  | Środki dydaktyczne(ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra) | Tablica interaktywna, moduł e-learningowy.  |
|  | Wprowadzenie do zajęć | Zalogowanie się na platformie e-learningowej : kurs „Funkcja kwadratowa” (lekcja 9). |
|  | Przebieg zajęć *(pełna wersja)* | Lekcję prowadzimy wykorzystując do tego kurs „Funkcja kwadratowa” (lekcja 9) zamieszczony na platformie e-learningowej moodle. Zapoznajemy ucznia z teorią, ćwiczenia uczniowie rozwiązują samodzielnie. Optymalizacja jest to zagadnienie matematyczne, polegające na znalezieniu najlepszego rozwiązania, względem ustalonego kryterium, ze zbioru rozwiązań dopuszczalnych.Zapoznaj się z kilkoma przykładami zadań optymalizacyjnych, w których wykorzystuje się własności funkcji kwadratowej.***Przykład 1***.Pan Piotr chce kupić działkę budowlaną. Do wyboru ma trzy o różnych wymiarach, jednak każda o tym samym obwodzie 250 m. Pomóż wybrać działkę o największym polu powierzchni.RozwiązanieWprowadź oznaczenia: x – długość działki y – szerokość działkiDane: 2x + 2y = 250 Szukane: x, y takie, aby pole było największe.  y xZapisujemy pole powierzchni działki jako funkcję dwóch zmiennych x i y , określamy dziedzinę i ustalamy związek między długością i szerokością działki.   Wyznaczam pole działki jako funkcję długości działki: dla  Ponieważ funkcja P(x) jest funkcją kwadratową to dla a = -1 <0 posiada wartość największą i osiąga ją dla argumentu m.*Pole powierzchni działki będzie największe , gdy długość działki wynosi 62,5 m , natomiast szerokość 62,5 m.****Przykład 2.*** Liczbę 9 przedstaw w postaci sumy dwóch takich liczb, aby suma ich kwadratów była najmniejsza.Zapisujemy liczbę 9 w postaci dwóch składników x i y.**Dane:** 9 = x + y, więc y = 9 – x**Szukane:** takie x i y, aby była najmniejsza.Zapisujemy funkcję dwóch zmiennych x i y opisująca wyrażenie, które ma przyjąć najmniejszą wartość. Ustalamy dziedziny zmiennych.Sprowadzamy funkcję dwóch zmiennych do funkcji jednej zmiennej, wykorzystując zależność y = 9 – x:  Z własności funkcji kwadratowej wiemy, że osiąga ona wartość najmniejszą (ponieważ a = 1 >0) dla argumentu .Wyznaczamy drugi składnik y = 9 – x = 9 – 9 = 0*Aby warunki zadania były spełnione liczbę 9 należy rozłożyć na składniki 9 i 0.*Wykonaj ćwiczenia sprawdzające z kursu „Funkcja kwadratowa” (lekcja 9) zamieszczony na platformie e-learningowej moodle. **Zad. 1.** Największa możliwa wartość iloczynu dwóch liczb, których suma jest równa 82 wynosi:A. 1860 B. 1681 poprawneC. 1861D. 1680**Zad. 2.** Prostokąt o obwodzie 4 dm ma największe pole, gdy ma wymiary:A. 15 cm i 25 cmB. 2 dm i 2 dmC. 10 cm i 10 cm poprawneD. 5 cm i 15 cm**Zad. 3.** Liczbę 12 przedstawiono jako sumę dwóch składników, których suma kwadratów jest najmniejsza. Składnikami tymi są:1. 6 i 6 poprawne
2. 4 i 8
3. 4,5 i 7,5
4. 2 i 8

**Zad. 4.** Pole prostokąta o obwodzie 44 dm może opisywać funkcja:1. poprawne
2.

 **Zad. 5.**  Boisko ma wymiary 20 m i 30 m. Krótszy bok wydłużamy o x m, a dłuższy skracamy o x m. Pole otrzymanego boiska będzie największe dla x równego:1. 5 m poprawne
2. 3 m
3. 4 m
4. 8 m

**Rozwiązywanie zadań.**  Treść zadań do lekcji została umieszczona na platformie e-learningowej na końcu lekcji 9 w postaci pliku pdf z możliwością druku. Po przejściu przez strony dotyczące teorii i ćwiczeniowe uczeń ma za zadanie samodzielnie rozwiązać trzy zadania i przesłać do nauczyciela odpowiedzi korzystając z platformy. ***Zadania do lekcji 10- lekcja 9 kursu e-learningowego (do samodzielnego rozwiązania i przesłania odpowiedzi)*****Zad. 9.1.** Liczbę 200 przedstaw w postaci różnicy dwóch liczb tak, aby suma ich kwadratów była najmniejsza. Jakie są te liczby?**Zad. 9.2.** Pani Zofia zdecydowała się na zakup działki ogrodniczej. Która działka w kształcie prostokąta o obwodzie 80 m ma największe pole powierzchni?**Zad. 9.3.** Pani Ania pracuje w sklepie warzywnym, w którym liczbę kilogramów sprzedanych warzyw opisuje następujący wzór: , gdzie k oznacza liczbę godzin, jaka upłynęła od otwarcie sklepu. W której godzinie po otwarciu sklepu pani Ania sprzedała najwięcej warzyw? Ile to było kilogramów? |
|  | Podsumowanie zajęć | Ocena aktywności uczniów na lekcji i zadanie pracy domowej. |
|  | Uwagi metodyczne do realizacji |  |

# Scenariusz nr 11\*: Nierówności kwadratowe z parametrem

|  |  |
| --- | --- |
| **Temat zajęć** | **Nierówności kwadratowe z parametrem** |
| **Dział** | **Funkcja kwadratowa** |
| **Klasa (poziom edukacyjny)** | **druga technikum** |
| **Czas trwania zajęć** | **90 minut** |
| **Lp.** | **Element scenariusza** | **Treść zajęć** |
|  | Cel ogólny | * Kształcenie umiejętności samodzielnego dochodzenia do wiedzy
* Rozwijanie umiejętności czytania zadań ze zrozumieniem
* Wykształcenie umiejętności rozwiązywania zadań dotyczących funkcji kwadratowej
* Rozwijanie umiejętności logicznego twórczego myślenia, wnioskowania, współpracy, współodpowiedzialności
 |
|  | Cele szczegółowe | Uczeń * potrafi rozwiązać równanie i nierówność kwadratową;
* potrafi zinterpretować treść zadania z parametrem i zapisać warunki;
* potrafi wyznaczać część wspólną kilku warunków.
 |
|  | Formy i metody | * Praca indywidualna z komputerem
* Ćwiczenia
* Praca z tablicą interaktywną
 |
|  | Środki dydaktyczne(ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra) | Tablica interaktywna, moduł e-learningowy. |
|  | Wprowadzenie do zajęć | Zalogowanie się na platformie e-learningowej : kurs „Funkcja kwadratowa” (lekcja 10). |
|  | Przebieg zajęć *(pełna wersja)* | Temat lekcji realizujemy w oparciu o tablicę interaktywną. Lekcję prowadzimy wykorzystując do tego kurs „Funkcja kwadratowa” (lekcja 10\*) zamieszczony na platformie e-learningowej moodle. Przeanalizujmy przykłady z tego kursu.**Przykład. 7**Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x.*Rozwiązanie:*Dana nierówność będzie prawdziwa dla dowolnego , jeżeli parabola o równaniu będzie leżała nad osią OX:x  Powinny być spełnione następujące warunki: 1. a = *m*, zatem
2. Obliczmy wyróżnik:

  Zatem Odp.: Nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x, jeżeli **.****Przykład. 8**Wyznacz wszystkie wartości parametru k , dla których nierówność jest spełniona dla każdego .*Rozwiązanie:*Rozważmy dwa przypadki:1. Jeśli ,

 * , wtedy , czyli

*Nierówność jest prawdziwa dla wszystkich liczb rzeczywistych.** , wtedy

1. Jeśli , to nierówność będzie prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej, gdy będzie przyjmować tylko wartości dodatnie:

x  Więc musi spełniać następujące warunki: .Warunek pierwszy:Warunek drugi:   <0 Rozwiązujemy nierówność kwadratową z niewiadomą *k:*-3k1//////////////////////////  Podsumowując wszystkie warunki otrzymujemy:Zatem nierówność jest prawdziwa dla wszystkich liczb rzeczywistych, gdy: **Rozwiązywanie zadań.**  Treść zadań do lekcji została umieszczona na platformie e-learningowej na końcu lekcji 10 w postaci pliku pdf z możliwością druku .**Zadania do rozwiązywania na lekcji:****Zad 1.** Dla jakiej wartości parametru nierówność jest spełniona dla każdej liczby rzeczywistej?**Zad 2.** Wyznacz wszystkie wartości , dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne dla każdej liczby rzeczywistej .**Zad 3.** Dla jakich wartości parametru k nierówność ma tylko jedno rozwiązania?**Zad 4.** Wyznacz wszystkie wartości , dla których nierówność jest spełniona dla każdej liczby rzeczywistej.**Zad 5.** Określ dla jakich wartości parametru p nierówność jest spełniona dla każdego .**Zadania do lekcji 2R- *lekcja 10 kursu e-learningowego* (do samodzielnego rozwiązania i przesłania odpowiedzi)****Zad. 10.3.** Znajdź wszystkie wartości p , dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla każdej liczby rzeczywistej x. |
|  | Podsumowanie zajęć | Ocena aktywności uczniów na lekcji i zadanie pracy domowej. |
|  | Uwagi metodyczne do realizacji |  |

# Scenariusz nr 12\*: Równania kwadratowe z parametrem

|  |  |
| --- | --- |
| **Temat zajęć** | **Równania kwadratowe z parametrem** |
| **Dział** | **Funkcja kwadratowa** |
| **Klasa (poziom edukacyjny)** | **druga technikum** |
| **Czas trwania zajęć** | **90 minut** |
| **Lp.** | **Element scenariusza** | **Treść zajęć** |
|  | Cel ogólny | * Kształcenie umiejętności samodzielnego dochodzenia do wiedzy
* Rozwijanie umiejętności czytania zadań ze zrozumieniem
* Wykształcenie umiejętności rozwiązywania podstawowych zadań dotyczących funkcji kwadratowej
* Rozwijanie umiejętności logicznego twórczego myślenia, wnioskowania, współpracy, współodpowiedzialności
 |
|  | Cele szczegółowe | Uczeń:* potrafi wyznaczyć warunki jakie ma spełniać dane zadanie;
* potrafi zastosować wzory Viete’a w rozwiązywaniu zadań;
* potrafi powiązać wszystkie warunki w zadaniach z parametrem i wyznaczyć ich część wspólną.
 |
|  | Formy i metody | * Praca indywidualna z komputerem
* Ćwiczenia
* Praca z tablicą interaktywną
 |
|  | Środki dydaktyczne(ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra) | Tablica interaktywna, moduł e-learningowy.  |
|  | Wprowadzenie do zajęć | Zalogowanie się na platformie e-learningowej : kurs „Funkcja kwadratowa” (lekcja 10). |
|  | Przebieg zajęć *(pełna wersja)* | Temat lekcji realizujemy w oparciu o tablicę interaktywną. Lekcję prowadzimy wykorzystując do tego kurs „Funkcja kwadratowa” (lekcja 10\*) zamieszczony na platformie e-learningowej moodle. Przeanalizujmy przykłady z tego kursu.**Przykład.3**Dla jakich wartości parametru k równanie ma dwa różne pierwiastki dodatnie?*Rozwiązanie:*Równanie kwadratowe ma dwa różne pierwiastki dodatnich znaków , gdy Rozważmy teraz po kolei każdy z warunków.Warunek pierwszy:   +k\_-44+ Rozwiązujemy nierówność kwadratową z niewiadomą k:  Warunek drugi:   *k* > -5 Warunek trzeci:  *k* > -2Wyznaczam część wspólną rozwiązań trzech warunków: zatem Odp.: Równanie kwadratowe ma dwa różne pierwiastki dodatnie dla parametru .***Przykład. 4***Wyznacz wartości parametru k, dla których równanie ma dwa różne pierwiastki ujemne.*Rozwiązanie:*Równanie ma dwa różne pierwiastki ujemne , gdy Rozważmy teraz po kolei każdy z warunków.Warunek pierwszy:1. Równaniebędzie miało dwa rozwiązania, jeżeli współczynnik przy będzie różny od zera:

 Warunek drugi:    Warunek trzeci:    Warunek czwarty:   Wyznaczam część wspólną rozwiązań trzech warunków:  zatem Odp.: Równanie kwadratowe ma dwa różne pierwiastki ujemne dla parametru .**Przykład. 5**Wyznacz wartości parametru m, dla których równanie ma dwa różne pierwiastki tego samego znaku.*Rozwiązanie:**Równanie ma dwa różne pierwiastki tego samego znaku, gdy*     Wyznaczam część wspólną rozwiązań warunków: Odp.: Równanie kwadratowe ma dwa różne pierwiastki  tego samego znaku dla parametru **Przykład. 6**Wyznacz wartości parametru k, dla których równanie ma dwa pierwiastki różnych znaków.*Rozwiązanie:*Równanie ma dwa pierwiastki różnych znaków , gdy Rozważmy teraz po kolei każdy z warunków.Warunek pierwszy:1. Równanie będzie miało dwa rozwiązania, jeżeli współczynnik przy będzie różny od zera:

Warunek drugi:  12 Warunek trzeci:   kK04 **///////**  Część wspólna warunków: Odp.: Równanie ma dwa pierwiastki różnych znaków , gdy  **Rozwiązywanie zadań.**  Treść zadań do lekcji została umieszczona na platformie e-learningowej na końcu lekcji 10 w postaci pliku pdf z możliwością druku .**Zadania do rozwiązywania na lekcji:****Zad 1.** Określ liczbę pierwiastków równania w zależności od parametru .**Zad 2**. Dla jakich wartości parametru równanie ma dwa pierwiastki rzeczywiste?**Zad 3**. Wyznacz te wartości parametru *m*, dla których równanie ma dwa różne pierwiastki tego samego znaku.**Zad 4.** Zbadaj dla jakich wartości parametru *m* równanie ma dwa pierwiastki rzeczywiste różnych znaków.**Zad 5.** Dla jakich wartości parametru równanie ma dwa dodatnie pierwiastki?**Zad 6.** Dla jakich wartości parametru równanie ma dwa ujemne pierwiastki?**Zad7.** Dla jakich wartości parametru pierwiastki równania spełniają warunek **Zadania do lekcji 2R- *lekcja 10 kursu e-learningowego* (do samodzielnego rozwiązania i przesłania odpowiedzi)****Zad. 10.4.** Dla jakich wartości parametru k równanie ma dwa pierwiastki różnych znaków? |
|  | Podsumowanie zajęć | Ocena aktywności uczniów na lekcji i zadanie pracy domowej. |
|  | Uwagi metodyczne do realizacji |  |

# Scenariusz nr 13\*: Wzory Viete’a

|  |  |
| --- | --- |
| **Temat zajęć** | **Wzory Viete’a** |
| **Dział** | **Funkcja kwadratowa** |
| **Klasa (poziom edukacyjny)** | **druga technikum** |
| **Czas trwania zajęć** | **90 min.** |
| **Lp.** | **Element scenariusza** | **Treść zajęć** |
|  | Cel ogólny | * Kształcenie umiejętności samodzielnego dochodzenia do wiedzy
* Rozwijanie umiejętności czytania zadań ze zrozumieniem
* Wykształcenie umiejętności rozwiązywania podstawowych zadań dotyczących funkcji kwadratowej
* Rozwijanie umiejętności logicznego twórczego myślenia, wnioskowania, współpracy, współodpowiedzialności
 |
|  | Cele szczegółowe | Uczeń:* potrafi podać zależność istnienia liczby miejsc zerowych od wyróżnika;
* potrafi obliczyć sumę i iloczyn pierwiastków równania kwadratowego bez ich obliczania;
* potrafi określić znaki pierwiastków równania kwadratowego bez ich obliczania.
 |
|  | Formy i metody | * Praca indywidualna z komputerem
* Ćwiczenia
* Praca z tablicą interaktywną
 |
|  | Środki dydaktyczne(ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra) | Tablica interaktywna, moduł e-learningowy.  |
|  | Wprowadzenie do zajęć | Zalogowanie się na platformie e-learningowej : kurs „Funkcja kwadratowa” (lekcja 10). |
|  | Przebieg zajęć *(pełna wersja)* | Temat lekcji realizujemy w oparciu o tablicę interaktywną. Lekcję prowadzimy wykorzystując do tego kurs „Funkcja kwadratowa” (lekcja 10\*) zamieszczony na platformie e-learningowej moodle. Zaczniemy od wprowadzenia wzorów, które są wykorzystywane przy rozwiązywaniu równań kwadratowych z parametrem.Dane jest równanie kwadratowe . Jeśli , to istnieją dwa rozwiązania: i Obliczymy sumę i iloczyn tych rozwiązań:Powyższe wzory pozostają prawdziwe również w przypadku, gdy .W tym przypadku oraz , więc .Zatem:Uzasadniliśmy w ten sposób następujące twierdzenie.***Twierdzenie VIETE`A*** *Jeżeli równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki to:* *oraz* ( gdy ).Są to ***WZORY VIETE`A.***CIEKAWOSTKA.http://www.matematycy.interklasa.pl/biografie/matematyk.php?str=viete***Przykład 1.***Nie obliczając pierwiastków równania, wyznacz ich sumę i iloczyn. , istnieją zatem dwa pierwiastki równania x1 i x2. Stąd:  **Przykład 2.**Nie wyznaczając rozwiązań równania oblicz wartość wyrażeń:Bez obliczania pierwiastków równania można również określić znaki tych pierwiastków.Liczby x1 , x2 są **dodatnie** ⟺ Liczby x1 , x2 są **ujemne** ⟺ Liczby x1 , x2 **mają różne znaki** ⟺ Przeanalizuj przykłady, które pokazują wykorzystanie powyższych własności do rozwiązywania równań i nierówności kwadratowych z parametrem.**Ćwiczenia do wykonania na lekcji:** kurs „Funkcja kwadratowa” (lekcja 10\*) zamieszczony na platformie e-learningowej moodle. **Zad. 1.** Suma pierwiastków równania jest równa:A. 6B. C. poprawneD. 5**Zad. 2**. Iloczyn pierwiastków równania jest równy:A. 3B. poprawneC. -1D. -3**Zad. 3.** Równanie ma dwa różne pierwiastki dla parametru p takiego, że:A. B. C. poprawneD. **Zad. 4**. Równanie ma dwa różne pierwiastki ujemne, gdy:A. poprawneB. C. D. **Rozwiązywanie zadań.**  Treść zadań do lekcji została umieszczona na platformie e-learningowej na końcu lekcji 10 w postaci pliku pdf z możliwością druku .**Zadania do rozwiązywania na lekcji:****Zad 1.** Oblicz sumę i iloczyn pierwiastków równania ( o ile istnieją):**Zad 2.** Nie obliczając pierwiastków równania określ ich znaki:1.

**Zad 3.** Przekształć podane wyrażenia tak, aby na podstawie wzorów Viete’a można było obliczyć wartości tych wyrażeń:**Zad 4.** Nie obliczając pierwiastków danego równania, wyznacz wartości wyrażeń: , , , , , :**Zad 5.** Nie obliczając pierwiastków równania , oblicz sumę odwrotności czwartych potęg jego pierwiastków.Po przejściu przez strony dotyczące teorii i ćwiczeniowe uczeń ma za zadanie samodzielnie rozwiązać zadania i przesłać do nauczyciela odpowiedzi korzystając z platformy. ***Zadania do lekcji 1R (do samodzielnego rozwiązania i przesłania odpowiedzi*:** *kurs „Funkcja kwadratowa” (lekcja 10\*) zamieszczony na platformie e-learningowej moodle.***Zad. 10.1.** Dla jakich wartości parametru *m* równanie ma dwa pierwiastki, których suma jest liczbą należącą do przedziału ?**Zad. 10.2.** Zbadaj liczbę pierwiastków równania w zależności od parametru *k*. |
|  | Podsumowanie zajęć | Ocena aktywności uczniów na lekcji i zadanie pracy domowej. |
|  | Uwagi metodyczne do realizacji |  |

# Scenariusz nr 14: Przesuwanie paraboli 2

|  |  |
| --- | --- |
| **Temat zajęć** | **Przesuwanie paraboli** |
| **Dział** | **Funkcja kwadratowa** |
| **Klasa (poziom edukacyjny)** | **Klasa pierwsza lub druga (w zależności od rozkładu materiału), jako powtórzenie do matury klasa trzecia lub czwarta** |
| **Czas trwania zajęć** | **45 min.** |
| **Lp.** | **Element scenariusza** | **Treść zajęć** |
|  | Cel ogólny | * Szkicowanie wykresów funkcji kwadratowej
* Odczytywanie pewnych własności funkcji kwadratowej ze wzoru lub wykresu
* Wyciąganie wniosków na podstawie wykresów funkcji
 |
|  | Cele szczegółowe | Uczeń* utrwala pojęcia takie jak: funkcja, dziedzina, zbiór wartości, miejsce zerowe;
* potrafi naszkicować wykres paraboli zadanej wzorem w postaci y = a(x – p)2 + q;
* potrafi odczytać monotoniczność i zbiór wartości funkcji kwadratowej w postaci y = a(x – p)2 + q;
* potrafi odczytać równanie osi symetrii funkcji kwadratowej w postaci y = a(x – p)2 + q;
* potrafi odczytywać i określać ilość miejsc zerowych funkcji kwadratowej w postaci y = a(x – p)2 + q w zależności od a, p i q.
 |
|  | Formy i metody | * Pogadanka
* Praca z zespołem klasowym
* Praca samodzielna
 |
|  | Środki dydaktyczne(ze szczegółowym wskazaniem środków opracowanych w projekcie np. moduł, gra) | Temat lekcji realizujemy w oparciu o tablicę interaktywną i program FnGraph. Zajęcia prowadzone przy użyciu tablicy interaktywnej mogą zostać zapisane, dzięki czemu mogą być wykorzystane w dowolnej chwili. Dodatkowo można je umieścić na serwerze szkolnym lub rozesłać uczniom pocztą e-mail. |
|  | Wprowadzenie do zajęć | Nawiązując do tematu lekcji przypominamy pojęcia: funkcji, dziedziny, zbioru wartości i miejsca zerowego. Na tej lekcji zajmiemy się krzywą zwaną parabolą, która jest wykresem funkcji .Wykresy szkicuje początkowo nauczyciel pokazując jednocześnie w jaki sposób wykorzystać program i tablicę. Każdy wykres ma inny kolor i jest podpisany. Następnie wykonując kolejne ćwiczenia uczniowie mogą szkicować wykresy funkcji.  |
|  | Przebieg zajęć *(pełna wersja)* | ***Ćwiczenie 1***Wykonaj wykresy funkcji: y = 2x2 , y = 0,5x2, y = -2x2 , y = -0,5x2.**Rozwiązanie:**Wykorzystując tablicę interaktywną i program FnGraph szkicujemy w jednym układzie współrzędnych zadane wykresy.Pytamy uczniów: co zauważyliście?Wyciągamy wnioski:1. Od parametru a zależy rozpiętość ramion oraz to jak są skierowane.
2. Wszystkie wykresy mają wierzchołek w początku układu współrzędnych.
3. Funkcja ma jedno miejsce zerowe x=0
4. Oś Y jest osią symetrii naszych parabol.

Uczniowie uzupełniają kartę odpowiedzi.Następnie rozwiązujemy kolejne ćwiczenia:***Ćwiczenie 2***1. Wykonaj wykres funkcji f(x) = 2x2, a następnie w tym samym układzie współrzędnych wykresy: g(x) = 2x2 - 3 i h(x) = 2x2 + 2
2. Wykonaj wykres funkcji f(x) = -3x2, a następnie w tym samym układzie współrzędnych wykresy: g(x) = -3x2 - 4 i h(x) = -3x2 + 1

Szukamy odpowiedzi na pytania:1) Jakie przekształcenie zostało wprowadzone miedzy wykresami funkcji f(x) a g(x) i h(x)?2. Czy zmieniła się ilość miejsc zerowych?3. Jakie współrzędne mają wierzchołki poszczególnych parabol?4. Jakie równanie ma oś symetrii podanych parabol?Wspólnie wyciągamy wnioski:1. funkcje zostały przesunięte do góry lub do dołu w zależności od tego jakie wartości dodaliśmy do funkcji.
2. Ilość miejsc zerowych zmienia się w zależności od tego czy przesunęliśmy parabolę w dół czy w górę i od tego jak skierowane są ramiona paraboli.
3. W zależności od przesunięcia (dół, góra) zmienia nam się druga współrzędna wierzchołka W=(0,q).

Uczniowie uzupełniają kartę odpowiedzi.***Ćwiczenie 3***1. Wykonaj wykres funkcji f(x) = 3x2, a następnie w tym samym układzie współrzędnych wykresy: g(x) = 3(x - 1)2 i h(x) = 3(x + 5)2
2. Wykonaj wykres funkcji f(x) = -2x2, a następnie w tym samym układzie współrzędnych wykresy: g(x) = -2(x – 3)2 i h(x) = -2(x + 4)2

Szukamy odpowiedzi na pytania:1) Jakie przekształcenie zostało wprowadzone miedzy wykresami funkcji f(x) a g(x) i h(x)?2. Czy zmieniła się ilość miejsc zerowych?3. Jakie współrzędne mają wierzchołki poszczególnych parabol?4. Jakie równanie ma oś symetrii podanych parabol?Wspólnie wyciągamy wnioski:1. funkcje zostały przesunięte w prawo lub w lewo.
2. Ilość miejsc zerowych nie zmienia się jeśli przesuwamy parabolę w prawo lub lewo.
3. W zależności od przesunięcia (prawo, lewo) zmienia nam się pierwsza współrzędna wierzchołka W=(p,0).

Uczniowie uzupełniają kartę odpowiedzi.***Ćwiczenie 4***1. Wykonaj wykres funkcji f(x) = 5x2, a następnie w tym samym układzie współrzędnych wykresy: g(x) = 5(x + 1)2 - 3 i h(x) = 5(x - 2)2 + 1
2. Wykonaj wykres funkcji f(x) = -4x2, a następnie w tym samym układzie współrzędnych wykresy: g(x) = -4(x – 2)2 –1 i h(x) = -4(x + 4)2 +3

Szukamy odpowiedzi na pytania:1) Jakie przekształcenie zostało wprowadzone miedzy wykresami funkcji f(x) a g(x) i h(x)?2. Czy zmieniła się ilość miejsc zerowych?3. Jakie współrzędne mają wierzchołki poszczególnych parabol?4. Jakie równanie ma oś symetrii podanych parabol?Wspólnie wyciągamy wnioski:1. Parabole przesunęliśmy zarówno w górę lub dół jak i w prawo lub lewo w zależności od tego jak zadziałaliśmy.
2. Zmieniły nam się ilości miejsc zerowych w zależności od przesunięcia.
3. Zmieniły nam się obie współrzędne wierzchołka W = (p,q).

Uczniowie uzupełniają kartę odpowiedzi. |
|  | Podsumowanie zajęć | Podane niżej zadania po jednym podpunkcie staramy się rozwiązać podczas trwania lekcji. Pozostałe przykłady uczniowie rozwiązują samodzielnie podczas trwania lekcji lub jako pracę domową. **Zadania do wykonania na lekcji (lub praca domowa):*****Zadanie 1***Naszkicuj wykresy funkcji Określ przedziały monotoniczności tej funkcji. ***Zadanie 2***Naszkicuj wykresy funkcji:Określ ich zbiór wartości.***Zadanie 3***Podaj równanie osi symetrii funkcji:***Zadanie 4***Znajdź wzór funkcji, której wykresem jest parabola o wierzchołku w punkcie W = (2, -1) przechodzącej przez punkt P = (-1, 4).***Zadanie 5***Określ ile miejsc zerowych ma funkcja *y* = *a*(*x* – *p*)2 + *q*, gdy:1. *a*>0, *p*>0 i *q*>0
2. *a*<0, *p*<0 i *q*<0
 |
|  | Uwagi metodyczne do realizacji |  |

**Załącznik do scenariusza nr 14**

Karta odpowiedzi do ćwiczeń

**Ćwiczenie 1**

Funkcja postaci ma wierzchołek w punkcie **W = (…,…)**

Jeżeli a>0 ramiona paraboli są skierowane do ……………………

Jeżeli a<0 ramiona paraboli są skierowane do …………………..

Oś ………. (czyli prosta x = ……. ) jest osią symetrii paraboli.

**Ćwiczenie 2**

1. Wykres funkcji f(x) = 2x2 przesunęliśmy o ………………………………………………………………………………………….. i otrzymaliśmy wtedy wykres funkcji g(x) = 2x2 – 3.

Parabola g(x) = 2x2 – 3 ma wierzchołek w punkcie **W = (…,…)** i ma ……. miejsca zerowe, prosta x = …... jest osią symetrii tej paraboli.

Wykres funkcji f(x) = 2x2 przesunęliśmy o ………………………………………………………………….………………………. i otrzymaliśmy wtedy wykres funkcji h(x) = 2x2 + 2.

Parabola g(x) = 2x2 + 2 ma wierzchołek w punkcie **W = (…,…)** i ma ……. miejsc zerowych, prosta x = …... jest osią symetrii tej paraboli.

1. Wykres funkcji f(x) = -3x2 przesunęliśmy o ..……………………………………………………………………………………….. i otrzymaliśmy wtedy wykres funkcji g(x) = -3x2 – 4.

Parabola g(x) = -3x2 – 4 ma wierzchołek w punkcie **W = (…,…)** i ma ……. miejsc zerowych, prosta x = …... jest osią symetrii tej paraboli.

Wykres funkcji f(x) = -3x2 przesunęliśmy o …………………..…………………………………………………………………….. i otrzymaliśmy wtedy wykres funkcji h(x) = -3x2 + 1

Parabola g(x) = -3x2 + 1 ma wierzchołek w punkcie **W = (…,…)** i ma ……. miejsca zerowe, prosta x = …... jest osią symetrii tej paraboli.

**Jeżeli po przesunięciu wykresu funkcji otrzymamy parabolę o wierzchołku W = (0,*q*), to ta parabola jest wykresem funkcji + ………...**

**Ćwiczenie 3**

1. Wykres funkcji f(x) = 3x2 przesunęliśmy o …………………………………………………………………………………………. i otrzymaliśmy wtedy wykres funkcji g(x) = 3(x - 1)2.

Parabola g(x) = 3(x - 1)2 ma wierzchołek w punkcie **W = (…,…)** i ma ……. miejsce zerowe, prosta x = …... jest osią symetrii tej paraboli.

Wykres funkcji f(x) = 3x2 przesunęliśmy o …………………………………………………………………………………………. i otrzymaliśmy wtedy wykres funkcji h(x) = 3(x +5)2.

Parabola g(x) = 3(x +5)2ma wierzchołek w punkcie **W = (…,…)** i ma ……. miejsce zerowe, prosta x = …... jest osią symetrii tej paraboli.

1. Wykres funkcji f(x) = -2x2 przesunęliśmy o …………………………………………………………….………………….……. i otrzymaliśmy wtedy wykres funkcji g(x) = -2(x – 3)2.

Parabola g(x) = -2(x – 3)2ma wierzchołek w punkcie **W = (…,…)** i ma ……. miejsce zerowe, prosta x = …... jest osią symetrii tej paraboli.

Wykres funkcji f(x) = -3x2 przesunęliśmy o ……………………………………………………….……………………………….. i otrzymaliśmy wtedy wykres funkcji h(x) = -2(x + 4)2

Parabola g(x) = -2(x + 4)2ma wierzchołek w punkcie **W = (…,…)** i ma ……. miejsce zerowe, prosta x = …... jest osią symetrii tej paraboli.

**Jeżeli po przesunięciu wykresu funkcji otrzymamy parabolę o wierzchołku W = (*p*,0), to ta parabola jest wykresem funkcji .**

**Ćwiczenie 4**

1. Wykres funkcji f(x) = 5x2 przesunęliśmy o ……………………………………………………………………………………. i otrzymaliśmy wtedy wykres funkcji g(x) = 5(x + 1)2 - 3.

Parabola g(x) = 5(x + 1)2 – 3 ma wierzchołek w punkcie **W = (…,…)** i ma ……. miejsca zerowe, prosta x = …... jest osią symetrii tej paraboli.

Wykres funkcji f(x) = 5x2 przesunęliśmy o ……………………………………………………………………………………. i otrzymaliśmy wtedy wykres funkcji h(x) = 5(x - 2)2 + 1.

Parabola g(x) = 5(x - 2)2 + 1 ma wierzchołek w punkcie **W = (…,…)** i ma ……. miejsc zerowych, prosta x = …... jest osią symetrii tej paraboli.

1. Wykres funkcji f(x) = -4x2 przesunęliśmy o …………………………….………………………………………………….…. i otrzymaliśmy wtedy wykres funkcji g(x) = -4(x – 2)2 - 1.

Parabola g(x) = -4(x – 2)2 - 1ma wierzchołek w punkcie **W = (…,…)** i ma ……. miejsc zerowych, prosta x = …... jest osią symetrii tej paraboli.

Wykres funkcji f(x) = -4x2 przesunęliśmy o ….…………………………………………………………….………………. i otrzymaliśmy wtedy wykres funkcji h(x) = -4(x + 4)2 + 3.

Parabola g(x) = -4(x + 4)2 + 3 ma wierzchołek w punkcie **W = (…,…)** i ma ……. miejsca zerowe, prosta x = …... jest osią symetrii tej paraboli.

**Jeżeli po przesunięciu wykresu funkcji otrzymamy parabolę o wierzchołku W = (*p*,*q*), to ta parabola jest wykresem funkcji .**